6. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Mo 11.05.09

Aufgabe 69: Die Legendre-Polynome P_k sind orthogonale Polynome $\langle P_i|P_j\rangle = h_i\,\delta_{ij}$ mit $P_k(1) = 1$ und Gewichtsfunktion $\rho(x) \equiv 1$ auf dem Intervall $[-1,+1]$. Bestimmen Sie die Polynome P_k für $k \leq 3$ auf drei verschiedenen Wegen. 4

(a) Benutzen Sie die Rekursion $(k{+}1)\,P_{k+1} = (2k{+}1)\,x\,P_k - k\,P_{k-1}$ mit $P_0 = 1$ und $P_1 = x$.

(b) Starten Sie von $P_0 = 1$ und berechnen Sie sukzessiv die höheren Polynome mit der Forderung nach Orthogonalität zu allen Polynomen kleinerer Ordnung sowie der Bedingung $P_k(1) = 1$. Beachten Sie bei der Auswertung der Integrale dass $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$.

(c) Benutzen Sie die *Formel von Rodrigues*: $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\,\partial_x^k (x^2{-}1)^k$.

Die angegebene Formel von Rodrigues soll bewiesen werden.

(d) Offensichtlich ist $F_k := \frac{1}{2^k k!}\,\partial_x^k (x^2{-}1)^k$ ein Polynom k-ten Grades, und man sieht leicht dass $F_k(1) = 1$. Um die Übereinstimmung von F_k und P_k nachzuweisen, reicht es aus, die Orthogonalität zu allen Legendre-Polynomen niedrigerer Ordnung zu zeigen. Integrieren Sie dazu $\langle F_k|P_\ell\rangle$, mit $\ell{<}k$, k-mal partiell. Beachten Sie bei der Ermittlung der Randbeiträge die spezielle Gestalt von F_k.

Aufgabe 70: Die Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = x^2$ seien außerhalb des Intervalls $P = [-\pi, +\pi)$ periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie ihre Darstellungen als Fourier-Reihen, komplex und auch reell. Auswerten bei $x{=}0$ ergibt zwei Summenformeln für π^2, die Sie zur Euler-Formel $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kombinieren. 4

Hinweis: Für Tipps siehe Präsenzübung

Aufgabe 71: Die Funktion $f(x) = h\,\mathrm{e}^{-\beta x}\,\Theta(a{-}x)$ mit $0{\leq}a{\leq}L$ sei außerhalb des Intervalls $P = [0, L)$ periodisch fortgesetzt. Welche Fourier-Koeffizienten c_n hat diese Funktion und folglich welchen Mittelwert f_0? Ermitteln Sie zu $\beta{=}0$ den Mittelwert durch eine geometrische Überlegung. Liefert Ihr f_0 den selben Wert für $\beta \to 0$? 4

Setzen Sie nun $a{=}L$. Geben Sie die Koeffizienten $a_n = c_n{+}c_{-n}$ und $b_n = \mathrm{i}(c_n{=}c_{-n})$ an und schreiben Sie die reelle Fourier-Reihe explizit auf. Überprüfen Sie, ob mit $\beta \to \infty$ sämtliche a_n, b_n und c_n verschwinden. Mit welcher β-Potenz geschieht dies? Welcher Anteil hält sich demnach länger, der gerade oder der ungerade?